CC1 - ELECTROSTATIQUE - 2022 -

Exercice 1

1°) P se situe sur l'axe x - Le seul plan de symétrie du système passant par P est le plan (x,O,z). $\vec{E}(P) \in (x,O,z)$ donc $E_y(P)=0$

donc $\vec{E}(P) = E_x(x)\,\vec{e_x} + E_z(x)\,\vec{e_z}$ (1)

2°) M se situe sur l'axe z - $M \in (x,O,z)$ plan de symétrie du système donc $E_y(M)=0$
$M \in (y,O,z)$ plan de symétrie du système donc $E_x(M)=0$ donc :

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\,\vec{e_z} \quad (1)$$

3°) O se situe sur l'axe z donc $E_y(O) = E_x(O) = 0$ mais en O $\exists$ 2 autres plans de symétrie du système, les plans contenant l'axe y et les 2 autres médianes du triangle équilatéral. Au point O le champ doit donc être dans le plan (x,O,z) et orienté à la fois dans la direction de ces 2 médianes - Ceci n'est possible que si $\vec{E}(O) = \vec{0}$ (1)

Exercice 2

1°) La seule invariance du système est une invariance par toute rotation autour de l'axe z. Donc en coordonnées cylindriques les effets électriques du cône ne dépendent pas de θ.

$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\,\vec{e_r} + E_\theta(r,z)\,\vec{e_\theta} + E_z(r,z)\,\vec{e_z} \quad (1)$$

2°) Le plan contenant M et l'axe z est un plan de symétrie car le cône est uniforme. Pour "sortir" de ce plan je dois modifier θ donc la composante $\perp$ à ce plan est E_θ. La composante de $\vec{E}(M)$ $\perp$ à ce plan est donc nulle.

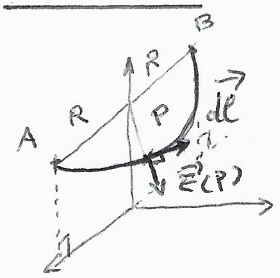
$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\,\vec{e_r} + E_z(r,z)\,\vec{e_z} \quad (2)$$

3°) Le plan contenant M' et l'axe z est un plan de symétrie donc $E_\theta(M')=0$
Le plan (x,O,y) qui contient M' est également un plan de symétrie donc $E_z(M')=0$ (2)

donc $\vec{E}(M') = E_r(r)\,\vec{e_r}$

4°) M'' est sur l'axe z. Tous les plans contenant l'axe z sont des plans de symétrie du système. Au point M'' $\vec{E}(M'')$ doit appartenir à tous ces plans à la fois, il est donc orienté suivant leur intersection commune donc : $\vec{E}(M'') = E_z(z)\,\vec{e_z}$ (2)

Exercice 3



1°) Sur le parcours circulaire $\widehat{AB}$ $\vec{dl} = R\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

et $\vec{E}_{\widehat{AB}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\vec{e_r}$

La circulation élémentaire $d\mathcal{C} = \vec{E}_{\widehat{AB}} \cdot \vec{dl} = 0$ donc $\mathcal{C}_{\widehat{AB}} = 0$ (1)

2°) en coord. cylindriques $\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}$

et $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

et $r^2 = x^2 + y^2$

donc $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left(x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y}\right)$

donc $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\,\vec{e_x} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\,\vec{e_y}\right)$ (2)

3°) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x\cdot(x^2+y^2)^{-1} \\ y\,(x^2+y^2)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -y\cdot 2x\,(x^2+y^2)^{-2} - x2y\,(x^2+y^2)^{-2} \end{pmatrix}$ 2

donc $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

4°) en coordonnées cylindriques $\vec{E} \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $E_\theta = E_z = 0$

en appliquant la formule du rotationnel en coord. cylindriques il vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = (0-0)\,\vec{e_r} + \frac{\partial E_r}{\partial z}\,\vec{e_\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \theta}\,\vec{e_z}$$ 1

or E_r ne dépend ni de θ, ni de z donc $\dfrac{\partial E_r}{\partial z} = \dfrac{\partial E_r}{\partial \theta} = 0$ donc $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

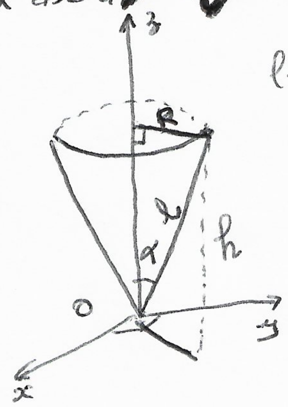
<u>Exercice 4</u>

1°) A partir d'un point de la surface du cône pour se déplacer en restant sur cette surface on peut s'éloigner du point O ($dl = dr$) ou bien tourner autour de l'axe z, on décrit alors un ~~cercle~~ cercle de rayon $r\sin\alpha$ (car l'ouverture du cône $= \alpha$) ($dl = r\sin\alpha\, d\varphi$). L'élément de surface est donc :

1,5 $\rightarrow dS = r\sin\alpha\, dr\, d\varphi$ ($\vec{dS} = r\sin\alpha\, dr\, d\varphi\, \vec{e_\theta}$) orientée suivant $\vec{e_\theta}$

2°) $$S_{\text{cône}} = \iint dS = \int_{r=0}^{r=l}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r\sin\alpha\, dr\, d\varphi$$ 1,5

or $\cos\alpha = \dfrac{h}{l}$ donc $l = \dfrac{h}{\cos\alpha}$



l : Longueur du cône

3°) donc $$S_{\text{cône}} = \sin\alpha \cdot \int_0^{\frac{h}{\cos\alpha}} r\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \sin\alpha \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{h}{\cos\alpha}} \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 2\pi \sin\alpha \frac{h^2}{2\cos^2\alpha} = \pi \frac{\sin\alpha\, h^2}{\cos^2\alpha}$$ 1

NB : si l'on définit R ("rayon" du cône, voir figure)

alors $$S_{\text{cône}} = \frac{\pi \sin\alpha\, h^2}{\cos^2\alpha} = \pi\sin\alpha\, l^2 \quad (\text{car } h = l\cos\alpha)$$

$$= \frac{\pi R l^2}{l} \quad \left(\text{car } \sin\alpha = \frac{R}{l}\right)$$

$$S_{\text{cône}} = \pi R l$$